

式中： $y$ —“静止层”深度， $\mu$ ； $x$ —毛细血管直径， $\mu$ ；常数项(13)为靠近管壁的红细胞与管壁的距离，为反映实际情况，常数项是必要的。处在这一层上的红细胞的电泳率，健康人为 $0.875 \pm 0.056$ ，患者为 $0.744 \pm 0.073$ ，与国内文献<sup>[6,7]</sup>（电泳率是我们根据文献提供的条件算出的：健康人 $0.878 \pm 0.067$ ；患者 $0.794 \pm 0.064$ ）结果一致。

应该说明，式(4)的数值未按血浆的折射率进行几何光学校正；校正后应为：

$$y = -11.2 + 0.1059x$$

### 小 结

1. 本文介绍了一套简化细胞电泳装置，包括稳压电源、同步计时器及碳电极等，结构简单、造价低、性能稳定可靠。

2. 用容易得到的圆柱形毛细管做观察小室，用折光液弥合毛细管外壁——盖玻片之间的缝隙，造成一个平面，以纠正细胞显像畸变，效果是好的。

3. 用本装置及方法测量了一批健康人及血栓闭塞性脉管炎患者的悬于自家血浆中的红

细胞电泳率，结果分别为： $1.12 \pm 0.072$ ； $0.95 \pm 0.094$ ，两者差异非常显著( $P < 0.001$ )，与文献一致。

以上情况表明，简化细胞电泳装置及方法是可用的；合理的方法比复杂的设备更为重要。

### 参 考 文 献

- [1] 上海第一医学院：细胞电泳，1977，20—23。
- [2] И. Н. Путилова: Руководство к Практическим занятиям по коллоидной химии, 中译本, 高等教育出版社, 1955, 150—151。
- [3] 田中克己: 显微镜の使い方, 中译本, 人民教育出版社, 1960, 113—114。
- [4] 施履吉: 定量组织学实验技术, 科学出版社, 1964, 102—106。
- [5] 上海第一医学院: 医用生物物理技术, (一) 1978, 26—27。
- [6] 李建明等: 血栓闭塞性脉管炎100例的血液流变学的观察, 中华医学杂志, 1980(12) 763。
- [7] 冯友贤等: 血管外科学, 上海科学技术出版社, 1980, 63: 219—220。

## 荧光漂白恢复动力学分析\*

张 耀 远

(中国科学院上海细胞生物学研究所)

### 一、 引 言

荧光漂白恢复测量技术(FPR)，作为测量处于微小系统中(如位于单个活细胞上)的经过荧光染色的分子、分子团块\*\*等迁移率的有力工具而得到迅速发展。目前不少生物研究人员用FPR来测量细胞膜、脂质体中的分子迁移率等问题<sup>[1]</sup>，这是因为细胞膜中分子的侧向运动反映了膜中分子的运动行为，越来越得到人们的兴趣。我所也自行装备了荧光漂白恢复测量装置<sup>[2]</sup>，并用此装置测定了人鼻咽癌细胞表面ConA受体的侧向扩散系数<sup>[3]</sup>。本文对FPR技术的理论过程作一详细介绍，从中导出膜中分子侧向迁移率所遵循的规律及定量分析的关系式。

\* 顾国彦同志对本文提出了许多宝贵意见，在此致谢。

\*\* 以下简称被测物质。

FPR技术的原理如下：在实验中将包含可移动的被测物质的一小部分暴露在微弱的光脉冲之中。然后在这个小区域内瞬间使被测物质产生一个不可逆的光化学漂白过程。迁移率是由被测物质的运动(如流动和扩散)使该区域的荧光增强的过程推算出来的。Axelrod等人首先提出FPR实验的理论公式<sup>[4]</sup>，我们对此作了重新推导及验证。尽管处理方法略有不同，但两者的结果是一致的，部分公式在形式上有些出入，但两者是可以互换的。

通常实验中用一个单束的轴对称的可聚焦的激光束作为漂白光源，经过适当衰减之后又兼作在恢复时期的测量光源。在下述的理论分析中，不仅使人们能确定侧向迁移率，而且也能够(1)区别扩散过程和系统迁移过程情况(系统迁移过程因素包括电泳作用、对流以及其它的迁移因素)。(2)测量在异质样品——如细胞表面上的可动的及不可动的被测物质的比率。这一比率具有一定的生物学意义。

以下分别就三种理想情况下的荧光恢复理论曲线作一介绍。(a)纯粹为一个用光场为Gaussian(高斯)分布或圆分布的激光束来测量的二维扩散过程；(b)单纯的进入和穿越高斯或圆分布光场的流动过程；(c)通过高斯分布光场的既有扩散又有流动的过程。

对于光漂白过程我们将它看作是一个简单的具有反应速率常数为 $\alpha I(r)$ 的不可逆一级反应。由于漂白光脉冲持续时间 $T$ 相对于迁移的特征时间来说是极短的，于是在静止状态位于 $r$ 处， $t$ 时刻的没有被漂白的被测物质浓度 $C(r, t)$ 能按下式计算：

$$\frac{dC(r, t)}{dt} = -\alpha I(r)C(r, t)$$

其中 $I(r)$ 是漂白光束强度。经求积后得

$$C(r, 0) = c_0 \exp[-\alpha T I(r)] \quad (1)$$

这里 $C(r, 0)$ 为荧光恢复测量刚开始时的被测物质浓度， $c_0$ 为被测物质浓度的初始值，它是一个常数。

我们定义参数 $K$ 为时间间隔 $T$ 之中的光漂白程度：

$$K \equiv \alpha T I(0) \quad (2)$$

对于一个高斯分布光场， $I(r)$ 有下列形式：

$$I(r) = (2P_0/\pi\omega^2) \exp(-2r^2/\omega^2) \quad (3)$$

其中 $\omega$ 为 $I(r) = \frac{1}{e^2} I(0)$ 处的半宽度， $P_0$ 为激光的总功率。对于一个圆分布的光场， $I(r)$ 由下式所示：

$$I(r) = \begin{cases} P_0/\pi\omega^2 & r \leq \omega \\ 0 & r > \omega \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\omega$ 为圆的半径。对于一个高斯分布光束，在不同 $K$ 值下漂白后由(1)式所示的初始浓度 $C(r, 0)$ 如图1所示。

## 二、方程的建立、初始值及边界条件

对于某种单一的被测物质，以扩散系数 $D$ 扩散及沿 $X$ 轴方向以 $V_0$ 匀速流动的侧向迁移过程，我们作如下分析。容易看出，系统中的被测物质浓度流的强度将由于扩散 $-D\nabla C(r, t)$ 及流动 $V_0 C(r, t)$ 所贡献。设想在所研究的区域内划出一小块位于 $x, x+dx; y, y+dy$ 之间的面积

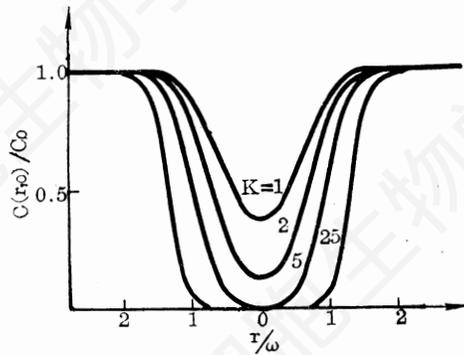


图1 不同K值  $C(r,0)/C_0$  与  $r/w$  关系曲线

元<sup>[5]</sup>。dt 时间内从线段 dy 处流入面积元的浓度为  $\left[ -D \frac{\partial C(r,t)}{\partial x} \Big|_x + V_0 C(r,t) \Big|_x \right] dy dt$ , 而失去的浓度为  $\left[ -D \frac{\partial C(r,t)}{\partial x} \Big|_{x+dx} + V_0 C(r,t) \Big|_{x+dx} \right] dy dt$ , 此外从线段 dx 处流入的浓度流强度为  $D \frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial y^2}$ 。另一方面 dt 时刻面积元 dxdy 内浓度的变化为  $\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} dt dxdy$ , 于是便有

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} = D \nabla^2 C(r,t) - V_0 \frac{\partial C(r,t)}{\partial x} \quad (5)$$

(5)式描述单一物质以扩散系数D扩散以及沿X轴方向以  $V_0$  流动的迁移过程。方程的边界条件为  $C(\infty, t) = c_0$ , 其初始条件  $C(r, 0)$  由(1)式所决定。从而在时间  $t \geq 0$  时所测得的荧光强度  $F_k(t)$  如下:

$$F_k(t) \equiv \frac{q}{A} \int I(r) C_k(r,t) d^2r \quad (6)$$

其中  $C_k(r,t)$  为方程(5)在给定的初始条件和边界条件下, 有赖于K值的解。参数q为光吸收、发射以及检测的所有量子效率的乘积; A为测量恢复荧光过程时激光束衰减因子。显然在光漂白之前的荧光强度  $F_k = qP_0 c_0 / A$ 。

光漂白之后,  $t=0$  时的荧光强度  $F_k(0)$  依赖于测量激光束的光场分布, 但与荧光恢复的模式无关。当激光束为高斯型时, 从(6)式出发, 作一变量替换就可得  $F_k(0) = \frac{c_0 P_0 q}{A} K^{-1} (1 - e^{-K})$ 。

当激光束为圆型时  $F_k(0) = \frac{c_0 P_0 q}{A} e^{-K}$ 。通过这二个结果可确定实验中K值的大小。为了更简洁地表达荧光漂白恢复曲线, 从而定义相对荧光强度  $f_k(t)$ :

$$f_k(t) \equiv \frac{F_k(t) - F_k(0)}{F_k(\infty) - F_k(0)} \quad (7)$$

### 三、偏微分方程的求解以及 $F_k(t)$ 的表达式

从方程(5)、(6)可见问题的关键是求解偏微分方程(5), 而(5)能获得级数解和封闭形式解或积分解两种形式。

#### A、偏微分方程的级数解形式

为获得(5)式的解, 首先对(5)式进行 Fourier 变换:

$$\tilde{C}(\vec{\mu}, t) = F_{\vec{\mu}}[C(r,t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[i(x\mu_x + y\mu_y)] C(r,t) \quad (8)$$

其中  $F_{\vec{\mu}}[C(\mathbf{r}, t)]$  表示一个变换至  $\vec{\mu}$  空间的变换,  $\vec{\mu} = (\mu_x, \mu_y, n)$ 。其逆变换为

$$C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_y \exp[-i(x\mu_x + y\mu_y)] \tilde{C}(\vec{\mu}, t) \quad (9)$$

将(9)式代入(5)式, 即得 Fourier 变换后的微分方程

$$\frac{\partial \tilde{C}(\vec{\mu}, t)}{\partial t} = -(D\mu^2 - i\mu_x V_0) \tilde{C}(\vec{\mu}, t) \quad (10)$$

方程(10)的解为:

$$\tilde{C}(\vec{\mu}, t) = \tilde{C}(\vec{\mu}, 0) \exp[-(\mu^2 D - i\mu_x V_0)t] \quad (11)$$

其中

$$\tilde{C}(\vec{\mu}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[i(x\mu_x + y\mu_y)] C(\mathbf{r}, 0) \quad (12)$$

这样就可获得

$$F_{\vec{k}}(t) = \frac{qc_0}{4\pi^2 A} \int d^2 \vec{\mu} \phi(\vec{\mu}) e^{-[D\mu^2 - iV_0 \mu_x]t} \quad (13)$$

其中  $\phi(\vec{\mu})$  是一个只依赖于激光束模式, 而与迁移模式无关的函数。

$$\phi(\vec{\mu}) \equiv \int d^2 \mathbf{r} I(\mathbf{r}) e^{-i\vec{\mu} \cdot \mathbf{r}} \int d^2 \mathbf{r}' e^{i\vec{\mu} \cdot \mathbf{r}' - \alpha T I(\mathbf{r}')} \quad (14)$$

显然方程(10)只要分别置  $D=0$ ,  $V_0=0$  便可用来处理纯粹流动或纯粹扩散问题。

(1) 对于激光光场为高斯分布时  $\phi(\vec{\mu})$  有下列结果[附录(1)]

$$\phi(\vec{\mu}) = \frac{\pi^2 \omega^4 I(0)}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n! n} e^{-\frac{\omega^2 \mu^2 (1+n)}{8n}} \quad (15)$$

(a) 纯扩散过程  $F_{\vec{k}}(t)$  的级数解 ( $V_0=0$ )

将(15)式代入(13)式, 经运算[见附录(2)]后得:

$$F_{\vec{k}}(t) = \frac{qc_0 P_0}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n!} [1 + n(1 + 2t/\tau_D)]^{-1} \quad (16)$$

其中  $\tau_D \equiv \omega^2/4D$ , 称特征时间。当  $K \ll 1$  时,  $F_{\vec{k}}(t) = \frac{qc_0 P_0}{A} \left\{ 1 - \frac{K}{2(1+t/\tau_D)} \right\}$ 。

(b) 纯流动过程  $F_{\vec{k}}(t)$  的级数解 ( $D=0$ )

将(15)式代入(13)式, 经运算后得

$$F_{\vec{k}}(t) = \frac{qc_0 P_0}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{(n+1)!} \exp\{-2n/(1+n)\} (t/\tau_F)^2 \quad (17)$$

其中  $\tau_F \equiv \omega/V_0$ , 称为该过程的特征时间。

(c) 扩散和流动同时存在过程的  $F_{\vec{k}}(t)$  的级数解

$$F_{\vec{k}}(t) = \frac{qc_0 P_0}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n \exp\{-2n(t/\tau_F)^2/[1+n(1+2t/\tau_D)]\}}{n! [1+n(1+2t/\tau_D)]} \quad (18)$$

(2) 激光光场为圆分布时  $\phi(\vec{\mu})$  的表达式

$$\phi(\vec{\mu}) = I(0) \{ 8\pi^3 \omega [J_1(\vec{\mu} \omega)/\vec{\mu}] \delta(\vec{\mu}) - (1 - e^{-K}) (2\pi\omega)^2 [J_1(\omega \vec{\mu})/\vec{\mu}]^2 \} \quad (19)$$

其中  $J_1(\bar{\mu}\omega)$  为一阶第一类 Bessel 函数<sup>[6,7]</sup>,  $\delta(\bar{\mu})$  为  $\delta$  函数。

(a) 纯扩散过程的  $F_k(t)$  级数解

$$F_k(t) = \frac{qc_0P_0}{A} \left\{ 1 - 2(1 - e^{-K}) \left\{ \frac{\omega^2}{8Dt} e^{-\frac{\omega^2}{2Dt}} \left[ I_0\left(\frac{\omega^2}{2Dt}\right) + I_2\left(\frac{\omega^2}{2Dt}\right) \right] + \frac{\omega^4}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^K (2+2K)! (K+1)! (\omega^2/4)^K}{[(2+K)!]^2 (K!)^2 (Dt)^{K+2}} \right\} \right\} \quad (20)$$

其中  $I_0\left(\frac{\omega^2}{2Dt}\right)$  及  $I_2\left(\frac{\omega^2}{2Dt}\right)$  为变型 Bessel 函数。从 (20) 可得  $F_k(\infty) = \frac{qc_0P_0}{A}$ , 而此种情况下荧光恢复过程中荧光相对强度  $f_k(t)$  为:

$$f_k(t) = 1 - (\tau_D/t) \exp[-2\tau_D/t] \left[ I_0\left(\frac{\omega^2}{2Dt}\right) + I_2\left(\frac{\omega^2}{2Dt}\right) \right] + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^K (2K+2)! (K+1)! (\tau_D/t)^{K+2}}{(K!)^2 [(K+2)!]^2} \quad (21)$$

(b) 纯流动过程的  $F_k(t)$  级数解

此过程可作如下考虑, 漂白后  $t$  时刻被漂白的圆形区域移动了  $V_0t$  的距离, 此刻荧光强度将由图 2 所示的两个区域所贡献。这两个区域内的物质浓度分别为  $c_0$  及  $C_k(0) = c_0e^{-K}$ , 于是

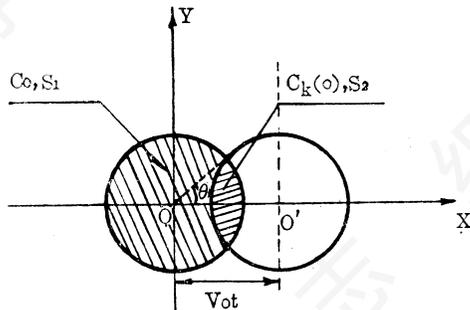


图 2 纯流动过程图示

$$F_k(t) = \frac{qc_0I(0)}{A} \left\{ \pi\omega^2 - 2\omega^2 \left[ \cos^{-1}\left(\frac{t}{2\tau_F}\right) - \frac{t}{2\tau_F} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4\tau_F^2}} \right] + 2e^{-K} \left[ \omega^2 \cos^{-1}\left(\frac{t}{2\tau_F}\right) - \frac{t\omega^2}{2\tau_F} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4\tau_F^2}} \right] \right\} \quad (22)$$

$$f_k(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \cos^{-1}\left(\frac{t}{2\tau_F}\right) - \frac{t}{2\tau_F} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4\tau_F^2}} \right] \quad (23)$$

其中  $\tau_F \equiv \omega/V_0$ , 且  $t \leq 2\tau_F$  时成立。从中可见  $f_k(t)$  与  $K$  无关。(图 3)

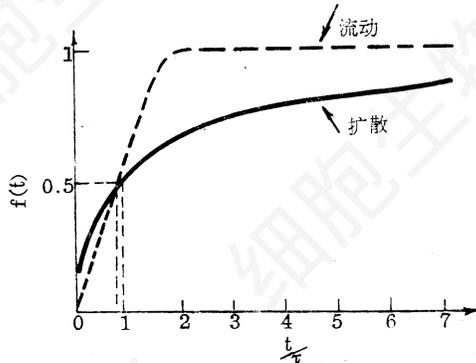


图 3 激光光束为圆形分布、纯流动、纯扩散  $f(t)$  对  $t/\tau$  曲线

### B、偏微分方程的积分解(仅限于高斯型激光束)

(a) 纯扩散过程( $V_0=0$ )

由微分方程的基本性质<sup>[8]</sup>以及适当的数学处理可由(5)式得到如下结果: [见附录(3)]

$$F_k(t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \int_0^\infty C(r', 0) e^{-\frac{r'^2}{4Dt}} \int_{-\pi}^\pi e^{\frac{rr'}{2Dt} \cos(\theta' - \theta)} d\theta' r' dr' = \frac{c_0 P_0 q}{A} \nu K^{-\nu} \Gamma(\nu) P(2K/2\nu) \quad (24)$$

其中  $\Gamma(\nu)$  为  $\Gamma$  函数,  $P(2K/2\nu) = [2^\nu \Gamma(\nu)]^{-1} \int_0^{2K} (t)^{\nu-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$ . 由(24)式得图4曲线.

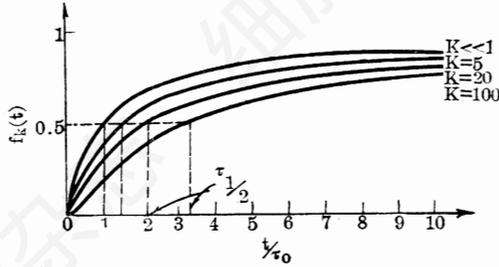


图4 激光束为高斯分布, 纯扩散过程  $f_k(t)$  对  $t/\tau_D$  的曲线

(b) 纯流动过程( $D=0$ )

$$F_k(t) = \frac{qP_{0c0}}{A\pi} \int \rho d\rho d\theta \exp[-K \exp(-\rho^2) - \rho'^2] \quad (25)$$

其中  $\rho'^2 \equiv \rho^2 + 2(t/\tau_F)^2 - 8^{1/2}(t/\tau_F)\rho \cos \theta$ , 且  $\tau_F \equiv \omega/V_0$ .

#### 四、扩散系数 $D$ 和流动速度 $V_0$ 的确定

对于激光光场为高斯分布的纯扩散过程, 由(7)式和(16)式得

$$f_k(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} [(-K)^n/n!][1+n(1+2t/\tau_D)]^{-1} - K^{-1}(1-e^{-K})}{1 - K^{-1}(1-e^{-K})} \quad (26)$$

令  $f_k(t) = 1/2$  时  $t = \tau_{1/2}$ ;  $K=1$  时由(26)式作一级近似便得到  $D \approx \frac{\omega^2}{4\tau_{1/2}}(e-1)$ , 其中  $(e-1)$  为  $r_D$  的一级近似值( $r_D \sim 1.718$ );  $r_D$  的二级近似值为 1.133.  $r_D \equiv \tau_{1/2}/\tau_D$ .

对于激光光场为高斯分布的纯流动过程, 由(7)式和(17)式有

$$f_k(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{(n+1)!} e^{[-2n/(n+1)](t/\tau_F)^2} - (1-e^{-K})K^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{(n+1)!} - K^{-1}(1-e^{-K})} \quad (27)$$

考虑  $K=1$ , 做零级近似得  $V_0 = \frac{\omega}{\tau_{1/2}} r_F$ ;  $r_F \sim \sqrt{\ln \frac{2e}{2e-1}} \sim 0.451$ ;  $r_F \equiv \tau_{1/2}/\tau_F$ . 这样我们便得到如下定量分析式:

$$D = \left( \frac{\omega^2}{4\tau_{1/2}} \right) r_D \quad (28)$$

$$V_0 = \frac{\omega}{\tau_{1/2}} r_F \quad (29)$$

一般说来  $r_D$ 、 $r_F$  与激光束模式、迁移模式及  $K$  值有关. 而由电子计算机处理可得  $r_D$ 、 $r_F$  与  $K$  之

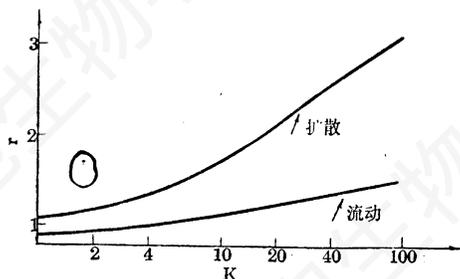


图 5 激光束为高斯分布  $r_D r_F$  对  $K$  曲线

间的关系曲线[图 5]。

这里所作的理论分析仅限于扩散和流动的理想过程，由理论分析所得的理论曲线与实验结果基本相符，说明这一数学模型的引入是合宜的。为此我们就能依据文中所得到的公式来进行实验数据处理，来定量分析细胞膜表面分子扩散运动及流动过程的程度。然而细胞膜表面的运动情况除了分子本身的扩散、流动之外还存在着其膜本身的运动(如膜的波动)，这些现象尚待进一步分析。

附 录\*\*\*

(1) 对于高斯型激光场  $\phi(\vec{\mu})$  的计算

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{\mu}) &= \int d^2r I(r) e^{-i\vec{\mu}\cdot r} \int d^2r' e^{i\vec{\mu}\cdot r'} \alpha I(r') \\
 &= \int d^2r \left( \frac{2P_0}{\pi\omega^2} \right) e^{-\frac{2r^2}{\omega^2}} e^{-i\vec{\mu}\cdot r} \int d^2r' e^{i\vec{\mu}\cdot r'} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-\alpha T I(r')]^n}{n!} \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(0)}{n!} (-K)^n \int d^2r e^{-\frac{2r^2}{\omega^2}} e^{-i\vec{\mu}\cdot r} \int d^2r' e^{i\vec{\mu}\cdot r'} \cdot e^{-\frac{2n}{\omega^2} r'^2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(0)}{n!} (-K)^n e^{-\frac{\omega^2 \mu^2}{8}} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \mu^2}{8n}} \left[ \int dx e^{-\frac{2}{\omega^2} x^2} \right]^4 \\
 &= \frac{\pi^2 \omega^4 I(0)}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n! n} e^{-\frac{\omega^2 \mu^2 (1+n)}{8n}}
 \end{aligned} \tag{30}$$

其中应用到  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$

(2) 高斯型激光场纯扩散过程  $F_k(t)$  的级数解

将(30)代入(13)整理后得:

$$F_k(t) = \frac{q_{c0} P_0 \omega^2}{8\pi A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n! n} \int e^{-[\frac{\omega^2(1+n)}{8n} + Dt] \mu_x^2} d\mu_x \int d\mu_y e^{-[\frac{\omega^2(1+n)}{8n} + Dt] \mu_y^2}$$

令

$$\beta = \frac{\omega^2(1+n)}{8n} + Dt$$

$$\begin{aligned}
 F_k(t) &= \frac{q_{r0} P_0 \omega^2}{8\pi A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n! n} \times 4 \left[ \int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} dx \right]^2 \\
 &= \frac{q_{c0} P_0 \omega^2}{8\pi A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n! n} \cdot \frac{1}{\beta} \\
 &= \frac{q_{c0} P_0}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K)^n}{n!} [1 + n(1 + 2t/\tau_D)]^{-1} \quad (31)
 \end{aligned}$$

其中

$$\tau_D \equiv \omega^2 / 4D.$$

(3) 高斯型激光场  $F_k(t)$  的积分解  
 纯扩散过程  $V_0 = 0$ , 由(5)式即得:

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 C(\mathbf{r}, t) \quad (32)$$

对于(32)式有一个特解

$$C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{4Dt}} \quad (33)$$

因为方程(32)为线性的, 因此特解的任意线性之和仍为方程之解

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi Dt} \int C(\mathbf{r}', 0) e^{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}} d^2 \mathbf{r}' \\
 &= \frac{1}{4\pi Dt} \int C(\mathbf{r}', 0) e^{-\frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta' - \theta)}{4Dt}} d^2 \mathbf{r}' \\
 &= \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \int_0^{\infty} C(r', 0) e^{-\frac{r'^2}{4Dt}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{rr'}{2Dt} \cos(\theta' - \theta)} d\theta' r' dr'
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{rr'}{2Dt} \cos(\theta' - \theta)} d\theta' = 2 \int_0^{\pi} e^{\frac{rr'}{2Dt} \cos \theta} d\theta; \text{ 且按照公式}^{[6]}:$$

$$J_0\{\sqrt{z^2 - t^2}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{t \cos \theta} \cos(z \sin \theta) d\theta$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{\frac{rr'}{2Dt} \cos \theta} d\theta = \pi I_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right); \text{ 于是}$$

$$C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r'^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right) C(r', 0) r' dr' \quad (34)$$

考虑到  $C(r', 0) = c_0 \exp[-\alpha T I(r')]$ ; 于是

$$\begin{aligned}
 F_k(t) &= \frac{q}{A} \int \frac{2P_0}{\pi \omega^2} e^{-\frac{2r^2}{\omega^2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \int e^{-\frac{r'^2}{4Dt}} J_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right) c_0 e^{-\alpha T I(r')} e^{-2r'^2/\omega^2} r' dr' d^2 \mathbf{r}' \\
 &= \frac{2P_0 c_0 q}{A \omega^2 c_0 t} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r'^2}{4Dt}} e^{-K \theta - 2r'^2/\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{r^2}{\omega^2} + \frac{1}{4Dt}\right) r^2} J_0\left(\frac{ir'}{2Dt} r\right) r dr d\theta r' dr'
 \end{aligned}$$

利用公式  $\int_0^{\infty} e^{-a^2 r^2} r^{\nu+1} J_{\nu}(br) dr = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-b^2/4a^2}$

$$F_k(t) = \frac{4P_0 q_0 v}{A\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4Dt}(1-\nu)r^2} e^{-K e^{-2r^2/\omega^2}} r^{\nu} dr$$

其中  $\nu = (1 + 2t/\tau_D)^{-1}$ ; 同时令  $u = K e^{-2r^2/\omega^2}$

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \frac{4P_0 q_0 v}{A\omega^2} K^{-\nu} \int_K^0 u^{\nu} e^{-u} \left(\frac{-\omega^2}{4}\right) \frac{du}{u} \\ &= \frac{c_0 P_0 q}{A} \nu K^{-\nu} \int_0^K u^{\nu-1} e^{-u} du \\ &= \frac{c_0 P_0 q}{A} \nu K^{-\nu} \Gamma(\nu) P(2K/2\nu) \end{aligned} \quad (35)$$

其中引用公式  $P(x^2/\nu) = \left[ 2^{\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]^{-1} \int_0^{x^2} (t)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt$ .

### 参 考 文 献

- [1] Smith, B. A. et al., 1978, *Proc. Nato. Acad. Sci. U. S. A.* 75:2759—2763.
- [2] 张孔华等, 细胞生物学杂志 1982(3)
- [3] 孙伟利 1982. 实验生物学报. 15:209—218.
- [4] Axelrod, D., D. E. Koppel, J. Schlessinger, E. Elson, and W. W. Webb, 1976, *Biophys. J.* 16: 1055—1069.
- [5] 梁昆森编, 1960 数学物理方法, 人民教育出版社.
- [6] 王竹溪、郭敦仁, 1965 特殊函数概论, 科学出版社.
- [7] Abramowitz, M., and I. A. Stegun, eds, 1965, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, Inc., New York.
- [8] Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger, 1947, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, London.

\*\*\* 目前最为常用的是高斯型激光场及纯扩散过程, 因此这里仅列出这方面的数学推导, 其他情况推导从略。